网络分析法在实际问题中的应用

李小荣

（江西信息应用职业技术学院　江西南昌　330043）

摘　要：网络分析法是运筹学中用来处理和解决最小费用最大流问题。本文通过几个具体教学实例来了解和掌握网络分析法在实际问题中的应用，其处理问题的思维与过程，大家可以参考与借鉴，有利于提高大家解决实际问题的能力。

关键词：网络分析法；实际问题；应用

Application of Network Analysis Method in Practical Problems

LI Xiaorong

(Jiangxi Vocational & Technical College of Information Application 330043)

Abstract: Network analysi is used in Operation Research to deal with the problems of minimum cost maximum flow. This paper is to make it clear to us the application of network analysis in practical problems, and its thought and process of dealing with problems, which is a reference for people and is beneficial to improve the ability of dealing with practical problems.

Key Words: network analysis method; practical problems; application

网络分析法，是美国匹兹堡大学的 T.L.Saaty 教授于 1996 年提出的一种适应非独立的递阶层次结构的决策方法，它是在层次分析法的基础上发展而形成的一种新的实用决策方法，是解决最小费用最大流问题的一种方法，但也可以处理其它一些问题，如运输问题、最大流问题等。

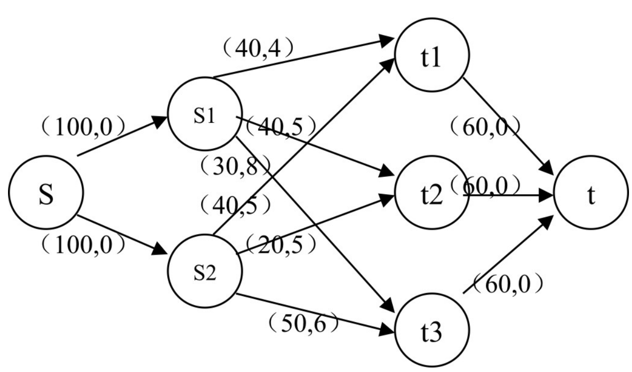
1 最小费用最大流问题

最小费用最大流问题，是经济学和管理学中的一类典型问题。在一个网络中每段路径都有“容量”和“费用”两个限制的条件下，此类问题的研究是试图寻找出流量从 A 到 B，如何选择路径以及分配经过此路径的流量，在流量最大的前提下，达到所用的费用为最小的要求。例如，有 n 辆卡车要运送物品，从 A 地到 B 地。由于每条路段都有不同的路费要缴纳，而每条路能容纳的车的数量也有限制，因此，最小费用最大流问题就是指如何分配卡车出发路径使所用费用达到最小且物品又能全部送到的一个很实在的实际问题。

实例 1

有 3 个电站 t1、t2、t3，每月每个电站各需 60 千吨煤，有 2 个煤矿 S1、S2，每月每个煤矿可提供 100 千吨煤。煤矿向电站每月的最大运输能力及运费为：煤矿 S1 向电站 t1 运输 40 千吨煤、运费 4 千元，向电站 t2 运输 40 千吨煤、运费 5 千元，向电站 t3 运输 30 千吨煤、运费 8 千元；煤矿 S2 向电站 t1 运输 40 千吨煤、运费 5 千元，向电站 t2 运输 20 千吨煤、运费 5 千元，向电站 t3 运输 50 千吨煤、运费 6 千元。试用网络分析法给出供煤方案，使总运费达到最小。

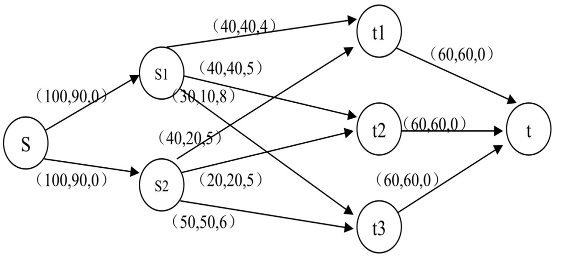
解：建立网络图，图中数字分别为最大流量和费用，见下图所示：



作者简介：李小荣（1963——），男，教授，主要研究方向：应用数学。

根据网络图分别找出各步最小费用流，

然后再此基础上增加流量得到下图所示：



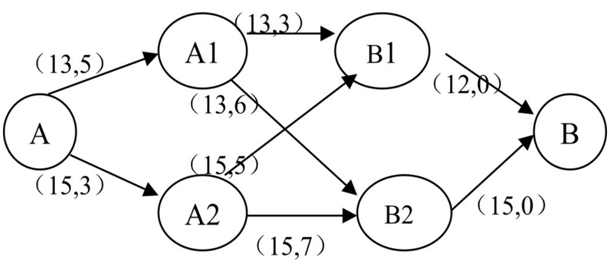
此时已满足需求量，且流量达到最大，

故最小费用是：$40\times4+40\times5+10\times8+20\times4+20\times5+50\times6=940$(千元)。

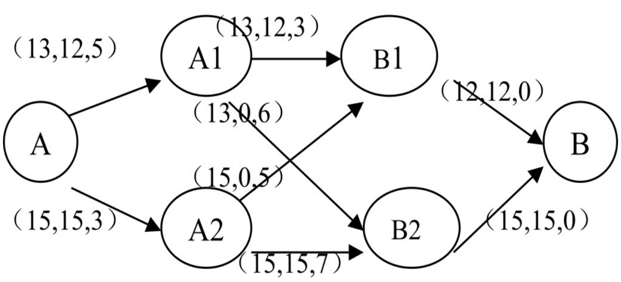
实例 2

设有两个煤矿 A1 和 A2，每月分别能生产煤 13 万吨和 15 万吨，每 1 万吨煤的生产费用分别为 5 千元和 3 千元。另有两个电站 B1 和 B2，每月需用煤分别为 12 万吨和 15 万，从煤矿 Ai 到电站 Bj 的单位运费如下表所示。试问：每个煤矿应生产多少万吨煤并运往何处，才能满足所有要求，同时使总费用达到最低？

解：建立网络图，图中数字分别为最大流量和费用，见下图所示：



分别找出各步最小费用流，然后再此基础上增加流量，最后得到下图所示：



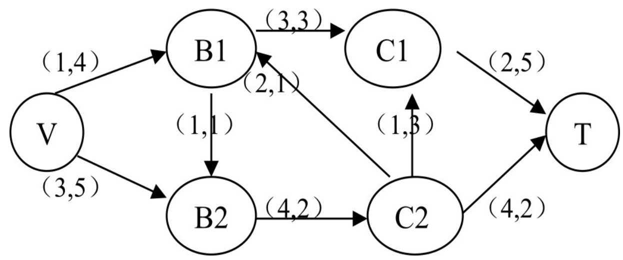
此时已满足需求量，且流量达到最大，

故最小费用是：$12\times5+12\times3+15\times3+15\times7=246$(千元)。

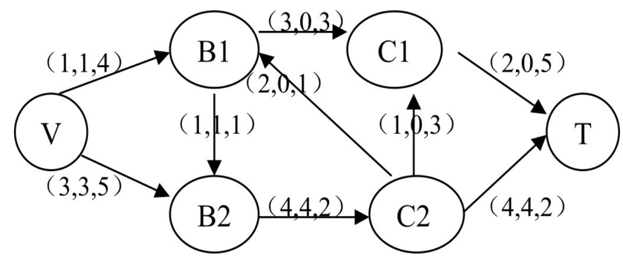
实例 3

中国石油天然气集团公司在东海有一个油气田（节点 V），该公司要将开采的天然气通过管道运送到上海的一个配送中心（节点 T），天然气在运送途中要经过两次管道换接点（节点 B 和 C），换接前后的管道长短不一，而且不同的管道对应不同的单位流量费（单位：千元），见下图所示。公司希望选择一个经济实惠的管道路线运输天然气，既运输最多的天然气，又使总运输费用达到最少。

解：建立网络图，图中数字分别为最大流量和费用，见下图所示：



分别找出各步最小费用流，然后再此基础上增加流量，最后得到下图所示：



此时已满足需求量，且流量达到最大，

故最小费用是：$1\times4+3\times5+1\times1+4\times2+4\times2=36$(千元)。

2 运输问题

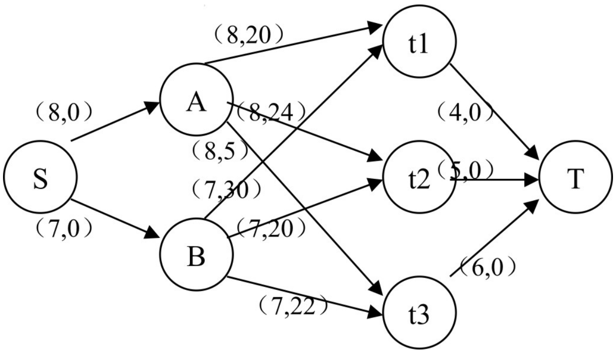
对于运输问题，可以将运输问题转化为最小费用最大流问题，然后利用网络分析法，就可以解决运输问题。

实例 4

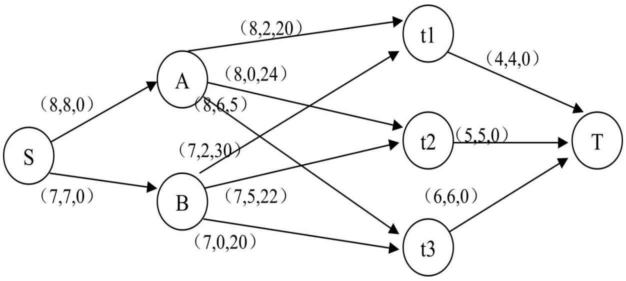
下表给出了某公司运输问题的产销平衡表与单位运价表（单位：百元 / 吨），将此问题转化为最小费用最大流问题，画出网络图并用网络分析法求其最优解。

解：将此运输问题转化为最小费用最大流问题，其网络图见下图所示：

销地 / 产地	t1	t2	t2	产量
A	20	24	5	8
B	30	22	20	7
销量	4	5	6	平衡



根据网络图分别找出各步最小费用流，然后再此基础上增加流量得到下图：



此时已满足需求量达到最大，其最小费用是：20×2+5×6+30×2+22×5=240(百元)。

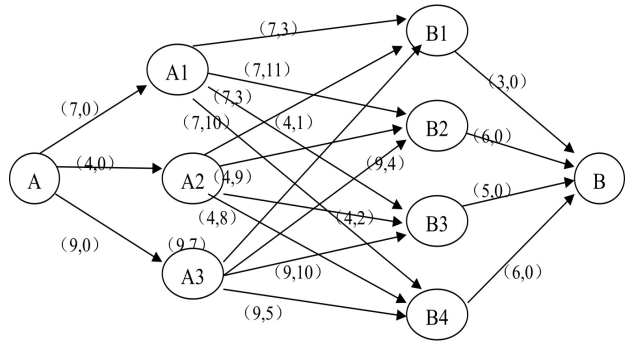
因此，本问题最优运输方案是：从产地 A 运输货物 2 吨到销地 t1、运输货物 6 吨到销地 t3，从产地 B 运输货物 2 吨到销地 t1、运输货物 5 吨到销地 t2 时，这样的运输方案，可以使总运输费用达到最低，其最低总运输费用是 240 百元。

实例 5

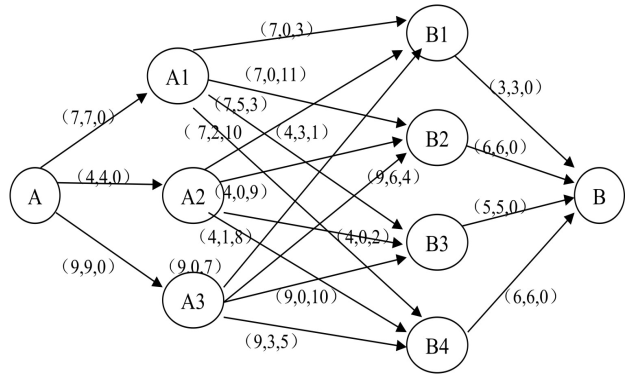
科大附属食品厂有 A1、A2、A3 三个分厂生产方便食品，要运送到 B1、B2、B3、B4 四个销售点，各个分厂的产量和销售地的销量以及方便食品的运费(单位：元)数据见下表所示。试问：应如何调运可使总运费达到最少？

销地 / 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	3	11	3	10	7
A2	1	9	2	8	4
A3	7	4	10	5	9
销量	3	6	5	6	平衡

解：将此运输问题转化为最小费用最大流问题，其网络图见下图所示：



根据网络图分别找出各步最小费用流，然后再此基础上增加流量得到下图：



此时已满足需求量，且流量达到最大，

故最小费用是：3×5+10×2+1×3+8×1+1×3+4×6+1×3+5×3=85(元)。

因此，本问题最优调运方案是：当从 A1 分厂调运方便食品到 B1 销地 0 袋、到 B2 销地 0 袋、到 B3 销地 5 袋、到 B4 销地 2 袋；从 A2 分厂调运方便食品到 B1 销地 3 袋、到 B2 销地 0 袋、到 B3 销地 0 袋、到 B4 销地 1 袋；从 A3 分厂调运方便食品到 B1 销地 0 袋、到 B2 销地 6 袋、到 B3 销地 0 袋、到 B4 销地 3 袋时，该科大附属食品厂调运方便食品使总运费达到最少，其最少总运费是 85 元。

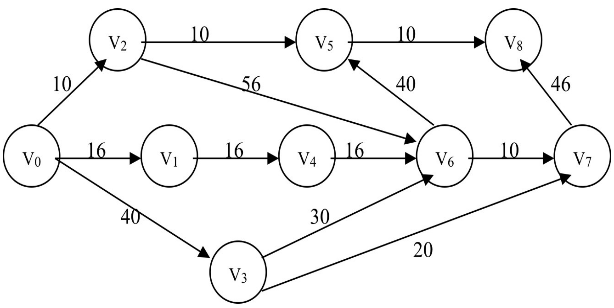
3 最大流问题

最大流问题，是经济学和管理学中的一类典型问题。在一个网络中每段路径都有“容量”这个条件的限制，此类问题的研究，是试图寻找出从始点 A 到终点 B 的流量，如何选择路径、如何分配经过路径的流量，才能使到达终点 B 的流量达到最大？例如，公路系统中有车流问题、控制系统中有信息流问题、网络系统中有物流问题、供水系统中有水流问题、金融系统中有现金流问题等。

实例 6

如下图所示，从 V0 派车到 V8，中间可以经过 V1、V2、

…、V7 各站，若各站间道路旁的数字表示单位时间内此路上所能通过的最多车辆数。试问：如何派车，才能使单位时间内达到 V8 的车辆最多？

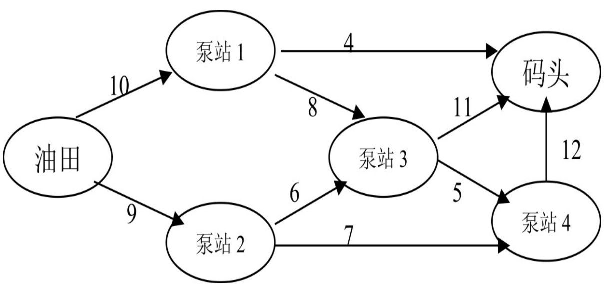


解：这是一个网络的最大流问题，用网络分析法求解。

当选择路径 V0→V2→V5→V8 时，其最大流为 10；当选择路径 V0→V3→V7→V8 时，其最大流为 20；当选择路径 V0→V3→V6→V7→V8，其最大流为 10。因此，从始点 V0 出发到终点 V8 的整个网络最大流为 40，故应该从始点 V0 派车 40 辆，才能使单位时间内达到 V8 的车辆最多，其最多车辆是 40 辆。

实例 7

某油田通过输油管道向港口输送原油，中间有 4 个泵站，每段管道上地输送能力如下图所示。已知泵站没有储存能力，求这个输油管系统的最大输送能力。

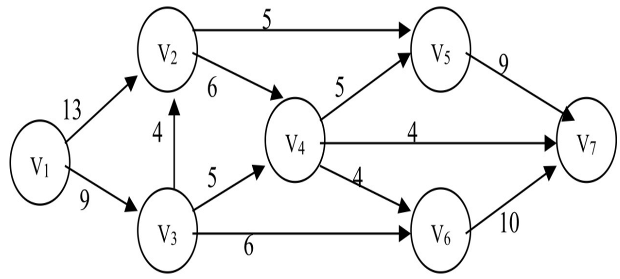


解：这是一个网络的最大流问题，用网络分析法求解。

当选择路径：油田→泵站 1→码头时，其最大流为 4；当选择路径：油田→泵站 2→泵站 4→码头时，其最大流为 7；当选择路径：油田→泵站 1→泵站 3→码头时，其最大流为 6；当选择路径：油田→泵站 2→泵站 3→码头时，其最大流为 2。因此，从油田出发到终点码头整个网络系统中的最大流为 19。

实例 8

某公司的产品在市场上供不应求，公司决定加班生产，并将尽可能多的产品运送到指定的市场上销售。产品从工厂到市场要经过一些转运站，运输途径如下图所示，图中 V1 和 V7 分别表示产品的产地和销地，V2—V6 表示转运站，运输线上的数字（单位：万件）表示该运输线上的最大运输能力即允许通过的最大产品数量，求这个产销系统的最大产品输送能力。

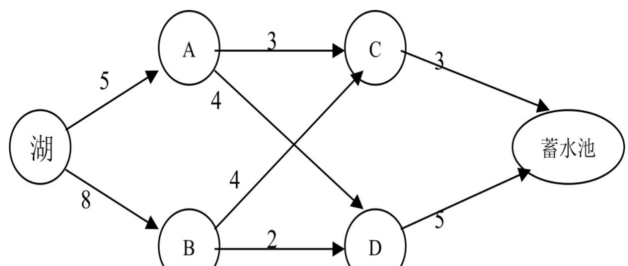


解：这是一个网络的最大流问题，用网络分析法求解。

当选择路径：V1→V2→V5→V7 时，其最大流为 5；当选择路径：V1→V3→V6→V7 时，其最大流为 6；当选择路径：V1→V3→V4→V6→V7 时，其最大流为 3；当选择路径：V1→V2→V4→V7 时，其最大流为 4；当选择路径：V1→V2→V4→V5→V7 时，其最大流为 2。因此，从产地 V1 到销地 V7 整个网络系统中的最大产品输送能力为 20（万件）。

实例 9

某城市建设了一个从湖中抽水到城市的蓄水池的管道系统如下图所示，线上标注的数字是单位时间通过两节点的流量。试问：单位时间由湖到蓄水池的最大流量（单位：吨）是多少？



解：这是一个网络的最大流问题，用网络分析法求解。

当选择路径：湖→A→C→蓄水池时，其最大流为 2；当选择路径：湖→A→D→蓄水池时，其最大流为 3；当选择路径：湖→B→D→蓄水池时，其最大流为 2；当选择路径：湖→B→C→蓄水池时，其最大流为 1。因此，从湖到蓄水池整个网络系统中的最大水流为单位时间内 8 吨。

参考文献：

[1]《运筹学》，岳宏志等主编，东北财经大学出版社，2012 年 8 月