单纯形法在线性规划问题中的应用

李小荣

（江西信息应用职业技术学院 江西南昌 330043）

摘　要：单纯形法是指按现代电子计算机标准程序求解线性规划模型的一种计算方法。本文通过几个教学实例，来了解和掌握单纯形法在线性规划问题中的应用，其思维与分析问题的过程，大家可以参考与借鉴。

关键词：单纯形法；线性规划；应用

Application of Simplex Method in Linear Programming Problems

LI Xiaorong

(Jiangxi Vocational & Technical College of Information Application 330043)

Abstract: Simplex method is a kind of calculation method to solve linear programming mode in accordance with modern computer standard program. This paper is to make it clear to us the application of simplex method in linear programming problems, and its thought and process of dealing with problems, which is a reference for people and is beneficial to improve the ability of dealing with practical problems.

Key Words: Simplex Method; Linear Programming; Application

单纯形法可分为代数形式的单纯形法和表格形式的单纯形法，前者提供基本算法所依据的逻辑规则，适用于在电子计算机上进行求解运算；后者将变量和数据列成表格，适用于笔算。两者在数学上是等价的。

线性规划，是运筹学中研究较早、发展较快、应用广泛、方法较成熟的一个重要分支，它是辅助人们进行科学管理的一种数学方法。研究线性约束条件下线性目标函数的极值问题的数学理论和方法，英文缩写 LP。它是运筹学的一个重要分支，广泛应用于军事作战、经济分析、经营管理和工程技术等方面，为合理地利用有限的人力、物力、财力等资源作出的最优决策，为管理者提供科学的依据。单纯形法是求解线性规划问题的一种最佳算法。

实例 1

某厂准备生产甲、乙、丙三种产品，它们消耗劳动力和材料如下表所示。试建立获得最大利润的生产计划的线性规划模型，并利用单纯形表法求解本问题的最优解。

产品 / 消耗 / 资源	甲	乙	丙	资源量
设备（台时 / 件）	6	3	5	45
材料（kg/ 件）	3	4	5	30
利润（元 / 件）	3	1	4	

解：设生产甲种产品 x1 件、乙种产品 x2 件、丙种产品 x3 件，则该厂获得最大利润的生产计划的线性规划模型为：

maxZ=3x1+x2+4x3

$$\begin{cases} 6x1+3x2+5x3 \le 45 \\ 3x1+4x2+5x3 \le 30 \\ xi \ge 0 (i=1、2、3) \end{cases}$$

下面用单纯形法求最优解，加入松弛变量 x4、x5，转化为标准形式为：

作者简介：李小荣（1963——），男，教师，主要研究方向：应用数学。

maxZ=3x1+x2+4x3

$$\begin{cases} 6x1+3x2+5x3+x4=45 \\ 3x1+4x2+5x3+x5=30 \\ xi\geq 0(i=1,2,3,4,5) \end{cases}$$

列表计算如下：

Xb	Cb	x1	x2	x3	x4	x5	b	比值
		3	1	4	0	0		
x3	0	6	3	5	1	0	45	45/5
x4	0	3	4	5	0	1	30	30/5
Zj		0	0	0	0	0	Z1=0	
σj		3	1	4	0	0		
x4	0	3	−1	0	1	−1	15	15/3
x3	4	3/5	4/5	1	0	1/5	6	10
Zj		12/5	16/5	4	0	4/5	Z2=24	
σj		3/5	−11/5	0	0	−4/5		
x1	3	1	−1/3	0	1/3	−1/3	5	
x3	4	0	1	1	1/5	2/5	3	
Zj		3	3	4	1/5	3/5	Z3=27	
σj		0	−2	0	−1/5	−3/5		

由上表知，最优解为 X*= (5,0,3,0,0)T，最优值为 Z*=27,因此,当甲种产品生产 5 件、丙种产品生产 3 件、乙种产品不生产时,该厂获得最大利润,其最大利润是 27 元。

实例 2

某建材厂生产四种型号的特用构件：Ⅰ型、Ⅱ型、Ⅲ型、Ⅳ型,各型号每件所需组装时间、检验时间、销售收入及该厂组装调试能力如下表所示,但现在因为某种特型材料比较紧张,每月最多只能进货 180 只(每件构件用一只),其中Ⅲ型、Ⅳ型到的不超过 100 只。试建立本问题的线性规划模型,并用单纯形法求解该建材厂获得最大收益的生产计划。

	Ⅰ型	Ⅱ型	Ⅲ型	Ⅳ型	生产能力(h)
组装时间	8	10	12	15	2000
检验时间	2	2	4	5	650
售价(百元)	4	6	8	10	

解：设 x1 、x2、x3、x4 分别表示Ⅰ型、Ⅱ型、Ⅲ型、Ⅳ型每月计划的产量,则该建材厂获得最大收益的生产计划的生产计划的线性规划模型为：

maxZ=4x1+6x2+8x3+10x4

$$\begin{cases} 8x1+10x2+12x3+15x4\leq 2000 \\ 2x1+2x2+4x3+5x4\leq 650 \\ x1+x2+x3+x4\leq 180 \\ x3+x4\leq 100 \\ xi\geq 0(i=1,2,3,4) \end{cases}$$

下面用单纯形法求最优解,加入松弛变量 x5 、x6 、x7 、x8,转化为标准形式为：

maxZ=4x1+6x2+8x3+10x4

$$\begin{cases} 8x1+10x2+12x3+15x4+x5=2000 \\ 2x1+2x2+4x3+5x4+x6=650 \\ x1+x2+x3+x4+x7=180 \\ x3+x4+x8=100 \\ xi\geq 0(i=1,2,3,4,5,6,7,8) \end{cases}$$

列表计算如下：

Xb	Cb	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	b	比值
		4	6	8	10	0	0	0	0		
x5	0	8	10	12	15	1	0	0	0	2000	2000/12
x6	0	2	2	4	5	0	1	0	0	650	650/4
x7	0	1	1	1	1	0	0	1	0	180	180/1
x8	0	0	0	1	1	0	0	0	1	100	100/1
Zj		0	0	0	0	0	0	0	0	Z0=0	
σj		4	6	8	10	0	0	0	0		
x5	0	8	10	−3	0	1	0	0	−15	500	500/10
x6	0	2	2	−1	0	0	1	0	−5	150	150/2
x7	0	1	1	0	0	0	0	1	−1	80	80/1
x4	10	0	0	1	1	0	0	0	1	100	—
Zj		0	0	10	10	0	0	0	10	Z1=1000	
σj		4	6	−2	0	0	0	0	−10		
x2	6	8/10	1	−3/10	0	1/10	0	0	−15/10	50	
x6	0	4/10	0	−4/10	0	−2/10	1	0	−2	50	
x7	0	2/10	0	3/10	0	1/10	0	1	5/10	30	
x4	10	0	0	1	1	0	0	0	1	100	
Zj		48/10	6	82/10	10	6/10	0	0	1	Z2=1300	
σj		−8/10	0	−2/10	0	−6/10	0	0	−1		

由上表知，最优解为 X*=(0，50，0，100，0，50，30，0)T，最优值为 Z*=13000，因此，当每月组装Ⅰ型构件 0 件、Ⅱ型构件 50 件、Ⅲ型构件 0 件、Ⅳ型构件 100 件时，该建材厂每月获得最大收益，其最大收益是 1300 百元。

实例 3

某工厂拥有 A、B、C 三种类型的设备，生产甲、乙两种产品，每件产品在生产中需要使用的机时、每件产品可以获得的利润(单位：元□件)以及三种设备可利用的机时数如下表所示。试问：甲、乙两种产品如何生产，才能使该工厂获利达到最大？写出其线性规划模型，并用单纯形法求最优解。

产品 利润 设备	甲	乙	设备能力(小时)
A	3	2	65
B	2	1	40
C	0	3	75
利润	1500	2500	

解：设生产甲种产品 x1 件、乙种产品 x2 件，则该工厂获得最大利润的生产计划的线性规划模型为：

maxZ=1500x1+2500x2

$$\begin{cases} 3x1+2x2\le 65 \\ 2x1+x2\le 40 \\ 3x2\le 75 \\ xi\ge 0(i=1、2) \end{cases}$$

下面用单纯形法求最优解，加入松弛变量 x4、x5、x6，转化为标准形式为：

maxZ=1500x1+2500x2

$$\begin{cases} 3x1+2x2+x3=65 \\ 2x1+x2+x4=40 \\ 3x2+x5=75 \\ xi\ge 0(i=1、2) \end{cases}$$

列表计算如下：

Xb	Cb	x1	x2	x3	x4	x5	b	比值
		1500	2500	0	0	0		
x3	0	3	2	1	0	0	65	65/2
x4	0	2	1	0	1	0	40	40/1
x5	0	0	3	0	0	1	75	75/3
Zj		0	0	0	0	0	Z0=0	
σj		1500	2500	0	0	0		
x3	0	3	0	1	0	−2/3	15	15/3
x4	0	2	0	0	1	−1/3	15	15/2
x2	2500	0	1	0	0	1/3	25	—
Zj		0	2500	0	0	0	Z1=62500	
σj		1500	0	0	0	0		
x1	1500	1	0	1/3	0	−2/9	5	
x4	0	0	0	−2/3	1	−7/9	5	
x2	2500	0	1	0	0	1/3	25	
Zj		1500	2500	500	0	500	Z2=70000	
σj		0	0	−500	0	−500		

由上表知，最优解为 X*=(5，25，0，5，0，0)T，最优值为 Z*=70000，因此，当甲种产品生产 5 件、乙种产品生产 25 件时，该工厂获得最大利润，其最大利润是 70000 元。

实例 4

一家工厂制造甲、乙、丙三种产品，需要三种资源：技术服务、劳动力和行政管理。每种产品的资源消耗量、单位产品销售后所能获得的利润值以及这三种资源的储备量如下表所示。试建立使得该厂能最大获利的生产计划的线性规划模型；并用单纯形法求该问题的最优解。

产品	技术服务	劳动力	行政管理	单位利润
甲	1	10	2	10
乙	1	4	2	6
丙	1	5	6	4
资源储备量	102	600	300	

解：设生产甲种产品 x1 件、乙种产品 x2 件、丙种产品 x3 件，则该工厂获得最大利润的生产计划的线性规划模型为：

maxZ=10x1+6x2+4x3

$$\begin{cases} x1+x2+x3\le 102 \\ 10x1+4x2+5x3\le 600 \\ 2x1+2x2+6x3\le 300 \\ xi\ge 0(i=1、2、3) \end{cases}$$

下面用单纯形法求最优解，加入松弛变量 x4、x5、x6，转化为标准形式为：

maxZ=10x1+6x2+4x3

$$\begin{cases} x1+x2+x3+x4=102 \\ 10x1+4x2+5x3+x5=600 \\ 2x1+2x2+6x3+x6=300 \\ xi\ge 0(i=1、2、3、4、5、6) \end{cases}$$

列表计算如下：

Xb	Cb	x1	x2	x3	x4	x5	x6	b	比值
		10	6	4	0	0	0		
x4	0	1	1	1	1	0	0	102	102/1

x5	0	10	4	5	0	1	0	600	600/10
x6	0	2	2	6	0	0	1	300	300/2
Zj		0	0	0	0	0	0	Z1=0	
σ j		10	6	4	0	0	0		
x4	0	0	6/10	5/10	1	–1/10	0	42	70
x1	10	1	4/10	5/10	0	1/10	0	60	150
x6	0	0	12/10	5	0	–2/10	1	180	150
Zj		10	4	5	0	1	0	Z2=600	
σ j		0	2	–1	0	–1	0		
x2	6	0	1	5/6	10/6	–1/6	0	70	
x1	10	1	0	1/6	–4/6	1/6	0	32	
x6	0	0	0	4	–2	0	1	100	
Zj		10	6	20/3	10/3	2/3	0	Z3=840	
σ j		0	0	–8/3	–10/3	–2/3	0		

由上表知，最优解为 X*=(32,70,0,0,0,100)T，最优值为 Z*=840，因此，当甲种产品生产 32 件、乙种产品生产 70 件、丙种产品不生产时，该厂获得最大利润，其最大利润是 840 元。

参考文献：

[1]《运筹学》（第四版），教材编写组编，清华大学出版社，2012 年 9 月

（上接第 49 页）

课程名称	课时	课程内容介绍
Spark	6	Spark 是一款高性能的分布式计算框架，比 MapReduce 计算快百倍；本课程内容全面涵盖了 Spark 生态系统、Spark 与 Hadoop 对比、开发环境搭建、RDD、编程模型、Web 监控等内容。
Spark Streaming	4	Spark Streaming 是用户结合流式、批处理和交互式查询应用的实时计算框架；本课程内容详细讲解原理与特点、适用场景、Dstream 操作、容错、性能优化和内存优化等。
Spark SQL	4	Spark SQL 的出现，使得 SQL–on–Hadoop 的性能相对于 Hive 有了显著的提高。达到 Spark 兼容 Hive 的功能。本课程详细讲解特点、运行架构、数据源、数据缓存、DataFrame 等。
实战案例 搜索引擎日志 数据统计分析	6	讲解 Hadoop 系统架构设计以及项目分析流程；通过对用户搜索记录数据的清洗，分析指标内容，得出关键词排行榜、用户停留时间最高页面等。
实战案例 电子商务平台 大数据分析	6	讲解 Spark 系统架构设计以及项目分析流程；本课程主要讲解搭建电商的数据处理平台、数据统计、分析及可视化技术的应用开发流程。

5 结语

如今大数据技术应用渗透各个行业，对大数据技术与应用专业教学对于大部分高职院校处于初步探索阶段，本文从大数据实训室建设和 hadoop 教学框架方面分析，提出大数据实训室建设方案，结合大数据生态圈和产业应用，提出 Hadoop“基础 + 应用”教学框架，为高职同类院校教学提供参考，提升大数据技术与应用专业学生技能水平和应用能力。

参考文献：

[1] 高职院校 _ 大数据创新实验室 _ 建设与规划[J].谢宇.无限互联网科技,2016.3.

[2] 高职大数据专业人才培养方案的探索与实践[J].叶健华，高海涛.温州职业技术学院学报,2017.12.

[3] 大数据背景下高职 Hadoop 课程内容体系建设[J].裴浩.电脑知识与技术.2016.12.

[4]“基于 Hadoop 的大数据分析”课程规划与设计[J].王涛，邵国强.电脑知识与技术.2018.7.

[5] 基于 Hadoop2.0 的大数据课程体系实验平台建设[J].李□,电脑知识与技术.2019(02).